Pépinière de mathématiques

Versailles, 27 et 28 octobre 2008

Géométrie

1. Soit ABC un triangle, et soit A' le point du côté [BC] tel que AA' soit la bissectrice de $\widehat{BAC}$. Montrer la relation classique

$$\frac{A'C}{A'B} = \frac{AC}{AB}$$

à l'aide du théorème de Thalès : on considérera le point D intersection de (AB) et de la parallèle à (AA') passant par C.

2. Soit ABCD un trapèze, où (AB) et (CD) sont parallèles. On note Δ la droite passant par les milieux de [AB] et [CD]. Montrer que les droites Δ, (AD) et (BC) sont concourantes ou parallèles.

3. Dans un triangle rectangle ABC on prend pour chacun des points A, B, C son symétrique A', B', C' par rapport au côté opposé. Quel est le rapport des aires des triangles $A'B'C'$ et ABC ?

4. Soit ABCD un rectangle, E et F deux points intérieurs au segment [AB] et vérifiant AE = EF.
La droite passant par E et perpendiculaire à (AB) rencontre la diagonale (AC) en G. Les droites (FD) et (BG) se coupent en H. Montrer que les triangles FBH et GHD ont la même aire.

5. *Exercice 4 de l'Olympiade internationale 2007 à Hanoï.*
Dans un triangle ABC la bissectrice de l'angle $\widehat{BCA}$ recoupe le cercle circonscrit en R, coupe la médiatrice de BC en P et la médiatrice de AC en Q. Le milieu de BC est K et le milieu de AC est L. Montrer que les triangles RPK et RQL ont la même aire.

6. Soit ABCD un trapèze, où (AB) et (CD) sont parallèles. Soit M le milieu de [AB]. On considère un point E intérieur au segment [AC] et on suppose que :
- les droites (BC) et (ME) se coupent en F ;
- les droites (FD) et (AB) se coupent en G ;
- les droites (DE) et (AB) se coupent en H.

Montrer que M est le milieu de [GH].

7. Soit ABCD un rectangle, E et F les milieux des côtés [AD] et [DC]. On appelle G l'intersection des droites (AF) et (EC). Montrer $\widehat{CGF} = \widehat{FBE}$.

8. Soit ABC un triangle rectangle en C et soit D le point de contact du cercle inscrit avec l'hypoténuse AB.
Montrer que l'aire du triangle ABC est le produit des longueurs DA et DB.

9. Les longueurs des côtés d'un triangle rectangle sont des entiers. Montrer que le rayon de son cercle inscrit est entier.

10. Dans un triangle ABC la hauteur CD est telle que AB = CD. On forme les carrés DBEF et ADGH (les points F et G sont des points de la hauteur CD).
Montrer que les droites (CD), (AE) et (BH) sont concourantes.

11. Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. On suppose CA + AI = BC (relation entre longueurs). Déterminer la valeur du rapport $\dfrac{\widehat{BAC}}{\widehat{CBA}}$.

12. Les diagonales d'un quadrilatère convexe ABCD se coupent en O. On suppose que les triangles ABO, BCO, CDO, DAO ont même périmètre. Montrer que ABCD est un losange.

13. Soit ABC un triangle rectangle en C. On désigne par M le milieu de [AB] et par H le pied de la hauteur issue de C.
Sachant que CH = 1 et CM = 2, déterminer l'angle $\widehat{CAB}$.

14. Dans l'espace, $\mathrm{ABCDA'B'C'D'}$ est un polyèdre à huit sommets et dix faces : deux de ces faces sont des carrés ABCD et $\mathrm{A'B'C'D'}$ de côté 2 contenus dans des plans parallèles ; les huit autres faces sont des triangles équilatéraux $\mathrm{ABB'}$, $\mathrm{BCC'}$, $\mathrm{CDD'}$, $\mathrm{DAA'}$, $\mathrm{AA'B'}$, $\mathrm{BB'C'}$, $\mathrm{CC'D'}$, $\mathrm{DD'A'}$ de côté 2. Les 16 arêtes du polyèdre sont donc de longueur 2.
Quelle est la distance entre les deux plans des faces carrées ?

15. Combien existe-t-il (à isométrie près) de triangles non aplatis à côtés entiers de périmètre égal à 12 ?

16. a) Soit $n \geqslant 3$ un entier. Déterminer la somme des angles d'un polygone convexe à n sommets.
b) Pour quelles valeurs de n peut-on trouver un polygone convexe à n sommets dont les angles sont de la forme α, $2\alpha, \dots, n\alpha$?

17. Une droite Δ rencontre en D et E les côtés [AB] et [AC] d'un triangle ABC. On suppose que le triangle ADE et le quadrilatère BCED ont même périmètre et même aire.
Montrer que la droite Δ passe par le centre I du cercle inscrit dans le triangle ABC.

18. Soit ABC un triangle rectangle en C. Le cercle de diamètre [AC] recoupe (AB) en E et la tangente en E à ce cercle rencontre (BC) en D.
Montrer que le triangle EDB est isocèle.

19. Soit C et D deux points distincts du demi-cercle de diamètre [AB]. Les droites (AC) et (BD) se coupent en E et les droites AD et BC se coupent en F.
Montrer que les milieux des segments [AB], [CD], [EF] sont alignés.

20. Soit ABC un triangle isocèle tel que $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$.
Soit D le milieu de [AC] et E la projection orthogonale de D sur (BC). Soit F le milieu de [DE].
Montrer que les droites (BF) et (AE) sont perpendiculaires si et seulement si ABC est équilatéral.

21. Soit ABC un triangle tel que $\widehat{\mathrm{BAC}} = 120°$. Les bissectrices intérieures issues de A, B, C rencontrent les côtés opposés en D, E, F.
Montrer que le cercle de diamètre [EF] passe par D.

22. Soit S un ensemble de n points dans le plan (n est un entier naturel supérieur ou égal à 3).
On suppose que tout triplet de points de S forme un triangle d'aire inférieure ou égale à 1.
Montrer qu'il existe un triangle d'aire inférieure ou égale à 4 contenant S.

Arithmétique

23. Soit a un entier supérieur ou égal à 10 et soit p un nombre premier qui divise $5a - 1$ et $a - 10$.
Montrer que p divise $a - 3$.

24. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'entier $n^2 + 1$ peut-il être divisible par 9 ?
b) Quel est le nombre d'entiers n compris entre 1 et 1000 tels que 9 divise $n^4 - 1$?

25. Trouver les couples (m, n) d'entiers naturels non nuls premiers entre eux tels que $\dfrac{5m - n}{m + n} \in \mathbb{N}^*$.

26. Soit a, b, c, d quatre entiers. Montrer que 12 divise le produit $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$.

27. Pour quels nombres premiers p, q, l'entier $(p + 1)^q$ est-il un carré parfait ?

28. Trouver les entiers à cinq chiffres $\overline{abcde}$ (en écriture décimale) qui sont divisibles par 9 et tels que $\overline{ace} - \overline{bda} = 760$.

29. Les lettres R, A, K, E, C représentent des chiffres différents. Déterminer ces chiffres pour qu'on ait la relation

$$4 \times \mathrm{RAKEC} = \mathrm{CEKAR}.$$

30. On considère la suite 1, 3, 4, 9, 10, 12, 13... constituée des entiers supérieurs ou égaux à 1 en ordre croissant qui sont des puissances de 3 ou des sommes de puissances distinctes de 3 (par exemple $4 = 3^1 + 3^0$, $10 = 3^2 + 3^0$, $13 = 3^2 + 3^1 + 3^0$).
Quel est l'entier qui se trouve à la centième place ?

31. a) Soit a et b deux entiers. On suppose que 3 divise a^2+b^2. Montrer que 3 divise a et 3 divise b.
b) Peut-on trouver quatre entiers a, b, c, d vérifiant $a^2+b^2=3(c^2+d^2)$?

32. On considère le nombre A dont l'écriture décimale est $999\ldots999$ avec 81 chiffres neuf. Quelle est la somme des chiffres de A^2 ?

33. On considère les nombres $1, 2, 3, \ldots, 2007, 2008$.
Devant chacun d'eux, on introduit soit le signe $+$, soit le signe $-$ et on fait alors la somme de ces entiers relatifs.
Peut-on obtenir 2008 ? 2009 ?

34. Trouver tous les couples (m,n) d'entiers supérieurs ou égaux à 1 vérifiant $\dfrac{3}{m}+\dfrac{2}{n}=1$.

35. a) Montrer que le carré d'un entier impair est toujours impair.
b) On se propose de prouver que $\sqrt{2}$ est irrationnel, c'est-à-dire qu'il n'est pas de la forme $\dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers.
On fait l'hypothèse $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers (écriture irréductible). Montrer que p est pair, puis que q est pair. Conclure.

36. Trouver le dernier chiffre de 2008^{2008} .

37. On rappelle que si deux entiers a et b sont premiers entre eux, (c'est-à-dire si 1 est leur seul diviseur commun) et si a et b divisent l'entier n, alors ab divise n.
Soit $n \geqslant 1$ un entier. On considère les affirmations
A : 2 divise n ; B : 3 divise n ; C : 4 divise n ; D : 6 divise n ; E : 12 divise n.
Déterminer si les affirmations suivantes sont exactes.
a) Si B et C sont vraies, alors E est vraie. b) Si C et D sont vraies, alors E est vraie.
c) Si A et D sont vraies, alors E est vraie. d) Si E est vraie, alors B et D sont vraies.
e) Si A est vraie pour un produit de deux entiers mn, alors A est soit vraie pour m, soit vraie pour n.
f) Si C est vraie pour un produit mn, alors C est soit vraie pour m, soit vraie pour n.
g) Si A est vraie pour l'entier $n+1$, alors A est vraie pour l'entier n^3-n.
h) Si A est vraie pour l'entier n, alors E est vraie pour l'entier n^3+2n.

Algèbre

38. Soit a et b deux nombres positifs tels que $\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}=1$.
Montrer $\dfrac{a}{1+b^2}-\dfrac{b}{1+a^2}=a-b$.

39. Sur chacune des six faces d'un cube on écrit un entier supérieur ou égal à 1. Pour chacun des huit sommets du cube, on forme le produit des trois nombres situés sur les faces contenant ce sommet.
La somme des huit nombres ainsi obtenus vaut 70. Déterminer la somme des nombres inscrits sur les six faces du cube.

40. Albert collectionne les timbres et il décide de consacrer 2002 centimes pour acheter des timbres. Béatrice lui propose des timbres à 10 et à 28 centimes chacun ; elle dispose d'autant de timbres que nécessaire.
Albert décide d'acheter les timbres de Béatrice et il veut avec ses 2002 centimes en acheter le plus grand nombre possible. Combien de timbres va-t-il acheter ?

41. Soit cinq nombres $a<b<c<d<e$.
a) Combien de sommes deux à deux peut-on former ?
b) Ces dix sommes sont 21, 26, 35, 40, 49, 51, 54, 60, 65, 79. Trouver a, b, c, d, e.

42. On rappelle que $|x-c|$ désigne la distance de x à c, c'est-à-dire $x-c$ si $x-c \geqslant 0$ et $c-x$ sinon.
Pour quelle valeur du nombre a l'équation $|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-99|=a$ possède-t-elle une solution unique ?

43. Soit a, b, c des nombres strictement positifs tels que $a \geqslant b \geqslant c$. Montrer

$$\frac{a^2-b^2}{c}+\frac{c^2-b^2}{a}+\frac{a^2-c^2}{b} \geqslant 3a-4b+c.$$

44. Soit $a_1,\ldots,a_n$ des nombres strictement positifs tels que $a_1\cdots a_n=1$. Montrer

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geqslant 2^n.$$

45. Soit $x_1,\ldots,x_4$ des nombres positifs tels que $x_1+x_2+x_3+x_4=1$. Montrer

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1 \leqslant \frac{1}{4}.$$

46. Huit nombres positifs dont la somme est égale à 1 sont placés sur les huit sommets d'un cube. À chaque arête on associe le produit des nombres placés aux extrémités.
Montrer que la somme des nombres placés sur les arêtes est au plus $1/4$.

47. Étant donnés n nombres réels positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on appelle

- *moyenne arithmétique* de ces nombres le réel $a = \dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}$;
- *moyenne géométrique* de ces nombres le réel $g = \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$.

Rappel : g est le réel positif tel que $g^n = a_1a_2\ldots a_n$.
On se propose de démontrer $g \leqslant a$.
a) Démontrer le résultat pour deux réels a_1 et a_2.
b) Démontrer le résultat pour quatre réels, puis pour huit réels.
c) Démontrer le résultat pour trois réels a_1, a_2, a_3. On pourra poser $a_4 = a$ et utiliser b).
Traiter le cas de n réels pour $5 \leqslant n \leqslant 7$.
d) Généraliser.

48. a) Soit a, b deux réels vérifiant $a^2+b^2=a+b=1$. Montrer $ab=0$.
b) Soit a, b, c trois réels vérifiant $a^3+b^3+c^3=a^2+b^2+c^2=a+b+c=1$. Montrer $abc=0$.

49. Soit x, y, z des réels vérifiant $x^3=2y-1$, $y^3=2z-1$, $z^3=2x-1$.
Montrer $x=y=z$.

50. Trouver les solutions (x,y,z) du système $\begin{cases} xy = z-x-y \\ yz = x-y-z \\ zx = y-z-x \end{cases}$

Invariants, jeux

51. Un jeu se joue sur un échiquier carré comportant 64 cases : il y a huit colonnes numérotées de 1 à 8 et huit rangées numérotées de 1 à 8. On dit que deux cases sont voisines si elles ont un côté ou un sommet en commun.
Au début du jeu, on place 9 pions sur les 9 cases situées dans les colonnes 1, 2, 3 et les rangées 1, 2, 3.
Lorsque deux pions sont sur des cases voisines, l'un peut sauter l'autre à condition que la case d'arrivée soit vide : par exemple, si un pion est en position (3,5) et une autre pion est en position (3,6), le premier peut sauter sur la case (3,7) à condition que cette case soit vide ; autre exemple avec un pion en (3,5) et un pion en (4,6) : le premier peut sauter en (5,7) si la case est libre.
Est-il possible avec cette règle du jeu de transférer les neuf pions ci-dessus vers les neuf cases situées dans les colonnes 1, 2, 3 et les rangées 6, 7, 8 ?

52. On écrit au tableau les nombres $1, 2, 3, \ldots, 2001$. Le jeu consiste à choisir deux nombres a et b écrits au tableau, à les effacer et à les remplacer par $|a-b|$, puis à répéter toute l'opération jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul nombre écrit au tableau.
Peut-on faire en sorte que le nombre restant soit le nombre 2 ?

53. Je dispose dans un sac de 1995 billes noires et de 2000 billes blanches. J'ai en réserve autant de billes blanches que je veux. Je fais la manœuvre suivante :
— je prends deux billes dans le sac ;
- si elles sont de la même couleur, je les remplace par une bille blanche que je mets dans le sac ;
- si elles sont de couleurs différentes, je remets dans le sac la bille noire.

— je continue jusqu'à ne disposer que d'une bille dans le sac.
Quelle est la couleur de la bille restante ?

54. Dans la ville de Bagdad, le bon Calife vient d'inventer un nouveau jeu : on dispose de 20 cailloux et chacun des deux joueurs à tour de rôle peut prendre 1, 2 ou 5 de ces cailloux.
Le gagnant est celui qui prend le ou les derniers cailloux.
Le bon Calife adore ce jeu : comme il est Calife, il joue le premier et gagne toujours. Comment fait-il ?

55. Dans une urne, on met sept cartes numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
Claude tire trois cartes et ensuite Pierre en tire deux. Deux cartes restent dans l'urne.
Claude affirme à Pierre : "La somme des numéros de tes deux cartes est paire."
Quelles sont les cartes tirées par Claude pour qu'il soit sûr de ce qu'il dit ?

Raisonnement, dénombrement, tiroirs

56. Un homme part de Paris à 8 heures et arrive à Marseille à 20 heures. Il y passe la nuit, repart de Marseille à 8 heures et arrive à Paris à 20 heures (en empruntant la même route qu'à l'aller).
Montrer qu'il existe un point sur la route où l'homme s'est trouvé à la même heure à l'aller et au retour.

57. Une classe de troisième a vingt élèves. Pendant les vacances chacun de ces élèves envoie une carte postale à dix de ses camarades de classe. Montrer qu'au moins deux des élèves se sont envoyé mutuellement une carte postale.

58. Dans chacune des cases d'un tableau 3×3, on place un numéro pris parmi -1, 0, 1. On considère les huit nombres obtenus en faisant la somme des numéros de chacune des trois rangées, des trois colonnes et des deux diagonales du tableau.
Montrer qu'au moins deux de ces huit nombres sont égaux.

59. Paris a 3 000 000 habitants. Tout habitant a au plus 800 000 cheveux. Quel est le plus grand entier n pour lequel on peut affirmer : il existe au moins n Parisiens ayant le même nombre de cheveux.

60. On suppose que le plan est quadrillé. On place le nombre 1 dans une case, et on écrit les nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, etc en spiralant de la façon suivante :

3	4	5	6	7	8	← *ligne 2*
2	7	8	9	1	9	← *ligne 1*
1	6	**1**	2	2	1	← *ligne 0*
9	5	4	3	3	2	
8	7	6	5	4	3	
·	·	·	·	5	4	

Le 1 en gras situé en ligne 0 est le point de départ : le 2 situé à sa droite est le début de la spirale qui continue avec le 3 en dessous du 2, puis le 4 à gauche du 3 etc.
Au dessus du 1 de départ, on voit sur la figure un 8 en ligne 1 et un 5 en ligne 2.
Quel est le nombre inscrit en ligne 100 au dessus du 1 de départ ?

61. Une île est peuplée de *sages* qui disent toujours la vérité et qui habitent tous dans la ville A et de *menteurs* qui mentent toujours et qui habitent tous la ville B.
a) Vous arrivez sur cette île, vous rencontrez deux habitants et vous demandez à l'un deux : "Est-il vrai que l'un de vous deux, au moins, est un menteur ?" La réponse est alors "Oui". Qui sont les deux habitants que vous avez rencontrés ?
b) Vous arrivez sur cette île et vous rencontrez un habitant. Quelle question devez-vous poser pour savoir vers quelle ville conduit la route sur laquelle vous êtes ?

62. Une société est constituée à nouveau de sages et de menteurs.
a) On dispose 7 personnes de cette société autour d'une table ronde. Chacune dit alors : "J'ai pour voisins un sage et un menteur". Combien a-t-on de sages autour de cette table ?
b) Même question avec 1998 personnes.

63. On considère une grille 4×4 constituée de 16 cases. Combien au minimum faut-il noircir de cases pour qu'en éliminant deux colonnes quelconques et deux lignes quelconques on soit certain qu'il reste au moins une case noire ?

64. On considère une grille obtenue en divisant un carré ABCD de côté 4 en 16 carrés de côté 1.
En joignant d'une part les milieux E et F de [AB] et [CD], et d'autre part les milieux G et H de [AD] et [BC], on partage le carré ABCD en quatre carrés de côté 2.
Dans chaque carré de côté 1 on inscrit un des quatre chiffres 1, 2, 3, 4.
De combien de façons différentes peut-on remplir la grille ABCD de telle sorte que dans chaque ligne, dans chaque colonne et dans chaque carré 2×2, les quatre chiffres 1, 2, 3, 4 apparaissent ?

65. Une grille carrée 4×4 est constituée de 16 cases 1×1.
On place sur chacune des cases des grains de blé ; on pose au moins un grain par carré. On examine alors le nombre total de grains de blé dans chacune des lignes et chacune des colonnes de la grille, ce qui fournit huit totaux.
On souhaite obtenir huit totaux différents.
Combien au minimum faut-il de grains de blé pour que cela soit possible ?

66. On dispose de huit morceaux de ficelle égaux.
On les place sur une table devant soi, parallèlement entre eux, ce qui permet de distinguer les huit extrémités "hautes" des huit extrémités "basses".
On choisit au hasard deux des extrémités hautes et on les noue ; parmi les six extrémités hautes qui restent, on en choisit à nouveau deux au hasard et on les noue ; parmi les quatre restantes, on choisit à nouveau deux au hasard et on les noue ; enfin on noue les deux dernières extrémités.
On fait de même avec les extrémités basses.
Quelle est la probabilité pour qu'après ces opérations les huit morceaux de ficelle ainsi noués forment une seule boucle ?
On pourra généraliser en prenant $2n$ morceaux de ficelle.

67. On considère un carré 5×5 divisé en 25 cases 1×1.
Chaque case est colorée soit en rouge, soit en bleu.
Montrer que l'on peut trouver deux lignes et deux colonnes du carré telles que les quatre cases d'intersection soient de la même couleur.
A-t-on le même résultat avec un rectangle 4×5 divisé en 20 cases ?

68. Reprendre le problème précédent avec un rectangle 5×41 de 205 cases rouges ou bleues : existe-t-il trois lignes et trois colonnes telles que les neuf cases d'intersection soient de la même couleur ?

69. On place 51 points à l'intérieur d'un carré de côté 1. Montrer que parmi ces 51 points, on peut trouver trois points qui se trouvent à l'intérieur d'un disque de rayon 1/7.

70. On considère dans le plan tous les points à coordonnées (x, y) entières : $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$.
Sur chacun de ces points, on écrit un entier naturel $n \in \mathbb{N}$.
On suppose que l'entier écrit sur le point de coordonnées (x, y) est égal à la moyenne des entiers écrits sur les quatre points voisins (ceux de coordonnées $(x-1, y)$, $(x+1, y)$, $(x, y-1)$ et $(x, y+1)$).
Que peut-on dire ?

71. Soit $\mathrm{S} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un ensemble de n entiers naturels. On appelle *partie propre* de S toute partie de S contenant au moins un élément de S et qui n'est pas égale à S tout entier.
On suppose que la somme des éléments de toute partie propre de S n'est pas divisible par n.
Montrer que n divise la somme $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.