Correction du contrôle commun de mathématiques : $4^{\text{ème}}$

Vendredi 14 décembre 2007

Partie numérique :

Exercice 1 : (5 points)

1) Réponse C 2) Réponse B 3) Réponse B 4) Réponse B 5) Réponse C 6) Réponse A

Exercice 2 : (2 points)

1) Les deux nombres entiers relatifs dont le produit est – 25 et dont la somme est nulle sont 5 et (- 5).
En effet : $5 + (-5) = 0$ et $5 \times (-5) = -25$.
2) Les deux nombres entiers relatifs dont le produit est – 25 et dont la somme est 24 sont (- 1) et 25.
En effet : $(-1) \times 25 = -25$ et $(-1) + 25 = 24$

Exercice 3 : (2 points)

On calcule le nombre de facteurs négatifs. $99 - 38 = 61$
Il y a 61 facteurs négatifs et 61 est un nombre impair.
Dans un produit, si le nombre de facteurs négatifs est impair, alors ce produit est négatif.
Donc le produit est négatif.

Exercice 4 : (7 points)

$$A = \frac{-7}{6} - \frac{5}{8} = \frac{-7 \times 4}{6 \times 4} - \frac{5 \times 3}{8 \times 3} = \frac{-28}{24} - \frac{15}{24} = \frac{-28 - 15}{24} = \frac{-43}{24}$$

$$B = \frac{4}{7} + 2 = \frac{4}{7} + \frac{2 \times 7}{7} = \frac{4 + 14}{7} = \frac{18}{7}$$

$$C = -\frac{27}{15} : \frac{18}{25} = -\frac{27}{15} \times \frac{25}{18} = -\frac{3\times3\times3\times5\times5}{5\times3\times2\times3\times3} = -\frac{5}{2}$$

$$D = \frac{3}{7} - \frac{15}{7} \times \frac{8}{5} = \frac{3}{7} - \frac{3\times5\times8}{7\times5} = \frac{3}{7} - \frac{24}{7} = \frac{3-24}{7} = -\frac{21}{7} = -3$$

$$E = \frac{\frac{3}{2}+\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}-\frac{2}{5}} = \frac{\frac{3\times5}{2\times5}+\frac{2\times2}{5\times2}}{\frac{3\times5}{4\times5}-\frac{2\times4}{5\times4}} = \frac{\frac{15}{10}+\frac{4}{10}}{\frac{15}{20}-\frac{8}{20}} = \frac{\frac{19}{10}}{\frac{7}{20}} = \frac{19}{10} : \frac{7}{20} = \frac{19}{10} \times \frac{20}{7} = \frac{19\times2\times10}{10\times7} = \frac{38}{7}$$

Exercice 5 : (3 points)

1) $1 - \frac{3}{5} = \frac{5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ Après l'hiver, il reste $\frac{2}{5}$ du mazout dans la cuve de M Frileux.

Au printemps, il consomme les $\frac{2}{3}$ du reste donc : $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2 \times 2}{3 \times 5} = \frac{4}{15}$

Pendant le printemps, M Frileux a consommé $\frac{4}{15}$ du mazout.

2) Calcul de la proportion de mazout restante à la fin du printemps :

$$1 - \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{15}\right) = 1 - \left(\frac{3 \times 3}{5 \times 3} + \frac{4}{15}\right) = 1 - \left(\frac{9}{15} + \frac{4}{15}\right) = 1 - \frac{13}{15} = \frac{15}{15} - \frac{13}{15} = \frac{2}{15}$$

A la fin du printemps, la proportion de mazout restante est $\frac{2}{15}$ de la capacité totale de la cuve.

3) 280 L représentent les $\frac{2}{15}$ de la capacité totale de la cuve . $(280:2)\times 15 = 2100$
La cuve de M Frileux a une contenance de 2 100L.

Partie géométrique :

Exercice 1 : (5 points)

1) Données : Dans le triangle OAB, le point I est le milieu du segment [AB] ([OI] est la médiane relative au côté [AB]) et on a IO = IA = IB.
Propriété : si un côté d'un triangle mesure le double de la longueur de la médiane relative à ce côté, alors le triangle est rectangle et ce côté est son hypoténuse.
Donc OAB est un triangle rectangle en O.

2) Données : Les points A, O et C sont alignés et dans cet ordre.
Donc $\widehat{AOC} = 180°$ et $\widehat{AOC} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC}$ Donc $\widehat{BOC} = \widehat{AOC} - \widehat{AOB} = 180° - 90°$ $\widehat{BOC} = 90°$
Le triangle BOC est un triangle rectangle en O.

3) Données : Le triangle BOC est un triangle rectangle en O. [OJ] est la médiane relative à l'hypoténuse.
Propriété : si un triangle est rectangle, alors la longueur de la médiane relative à l'hypoténuse est égale à la moitié de celle de son hypoténuse.
Donc OJ = BC : 2 = BJ = JC.

Données : Dans le triangle OJC, on a OJ = JC.
Définition : si un triangle a deux côtés de même longueur, alors c'est un triangle isocèle.
Donc JOC est un triangle isocèle en J.

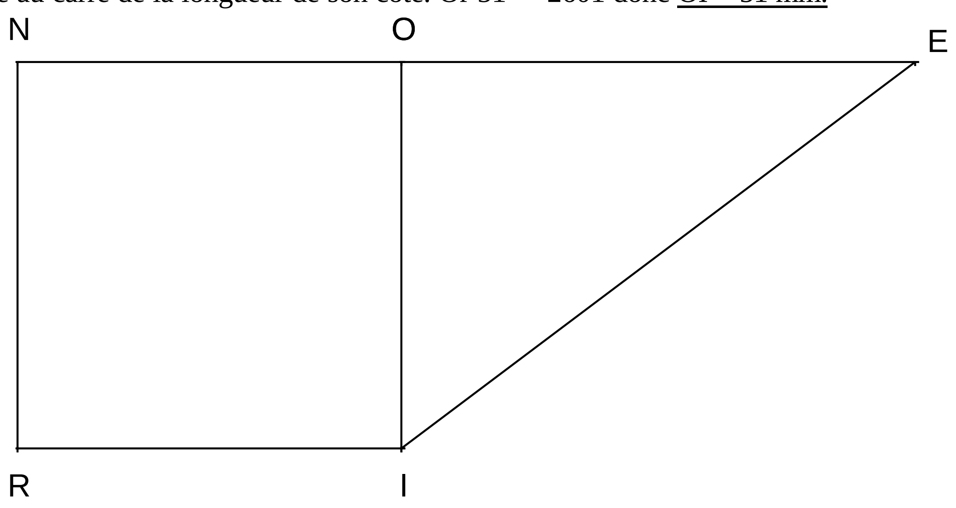
Exercice 2 : (2,5 points)

On nomme les sommets du triangle tel que : AB = 1,3 dm ; AC = 1 dm et BC = 0,8 dm.
Dans le triangle ABC, le plus grand côté est [AB].
On calcule : $AB^2 = 1,3^2 = 1,69$ $AC^2 + BC^2 = 1^2 + 0,8^2 = 1,64$.
On compare : $AB^2 \neq AC^2 + BC^2$
Donc : le triangle ABC n'est pas rectangle. Le menuisier ne pourra pas s'en servir comme équerre.

Exercice 3 : (4,5 points)

1) L'aire d'un carré est égale au carré de la longueur de son côté. Or $51^2 = 2601$ donc OI = 51 mm.

2) Figure :



3) Dans le triangle OIE, le plus grand côté est [EI].
On calcule : $EI^2 = 85^2 = 7\,225$ $OE^2 + OI^2 = 68^2 + 51^2 = 7\,225$.
On compare : $EI^2 = OE^2 + OI^2$
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on conclut que OIE est un triangle rectangle en O.

4) D'après l'énoncé : NOIR est un carré, par conséquent $\widehat{NOI} = 90°$. De plus, d'après la question précédente, OIE est un triangle rectangle en O, par conséquent : $\widehat{OIE} = 90°$

$\widehat{NOE} = \widehat{NOI} + \widehat{IOE} = 180°$

Propriété : si trois points forment un angle plat, alors ces trois points sont alignés.

Donc N, O et E sont alignés.

Exercice 4 : (8 points)

1) On commence par démontrer que le triangle ABC est un triangle rectangle en C.
Données : ABC est un triangle inscrit dans un cercle de diamètre [AB].
Propriété : si un triangle est inscrit dans un cercle ayant pour diamètre un côté de ce triangle, alors ce triangle est rectangle. Son hypoténuse est ce côté.
Donc ABC est un triangle rectangle en C.

Les points A, D et C sont alignés. Donc BCD est aussi un triangle rectangle en C.
Dans le triangle BCD rectangle en C, on a BC = 6 cm et DC = 4,5 cm.
Or d'après le théorème de Pythagore on a : $BD^2 = BC^2 + DC^2$ D'où : $BD^2 = 6^2 + 4{,}5^2 = 56{,}25$
Donc BD = 7,5 cm.

2) On commence par calculer AC
Données : Dans le triangle ABC rectangle en C, on a : BC = 6 cm et AB = 12 cm.
Or d'après le théorème de Pythagore on a : $AB^2 = AC^2 + BC^2$ D'où $AC^2 = AB^2 - BC^2 = 12^2 - 6^2 = 144 - 36 = 108$
Donc AC = $\sqrt{108}$

On calcule AD
Le point D appartient au segment [AC]. D'où AC = AD + DC
Donc AD = AC – DC = $\sqrt{108}$ - 4,5 AD ≈ 5,9 cm

BONUS : *Exercice extrait des Olympiades de 4ème 2007*

1) Si deux nombres positifs ont pour somme 1 alors l'un des deux est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$. Par exemple $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{2}$

Donc a est soit égal à 1 soit égal à 2.

Si $a = 1$ alors de $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ on déduit que $1+\frac{1}{b}=1$ ce qui est impossible.

Si $a = 2$ alors de $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ on déduit que $\frac{1}{2}+\frac{1}{b}=1$ et donc $b=\frac{1}{2}$ ce qui est exclu puisque a et b doivent être distincts. Il est donc impossible de trouver des entiers positifs distincts a et b tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$.

2) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ donc les entiers 3 et 6 conviennent.

3) Comme $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, avec l'égalité précédente, on peut écrire : $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$. Les entiers 2, 3 et 6 conviennent.

4) De l'égalité précédente, on déduit $\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}\times 1$ donc $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$

Comme $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ on a donc $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1$ Les entiers 2, 4, 6 et 12 répondent à la question.

5) Une méthode consiste à poursuivre la technique précédente. On multiplie par $\frac{1}{2}$ chaque membre de l'égalité précédemment obtenue. On a alors une nouvelle décomposition de $\frac{1}{2}$. En utilisant $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ on peut écrire une nouvelle décomposition de 1. Et ainsi de suite.

6) On fait de même …. un peu plus longtemps !!!