Correction du contrôle commun du 19 mai 2005

Partie algébrique :

Ex 1 :

$A=-7+4\times(-3)^2+5-5\times(6-11)=-7+36+5+25=59$

$B=-13+\left(8^2-70\right)^2=-13+(64-70)^2=-13+36=23$

Ex 2 :

$A=-3\times(-3)-2\times5+(-4)+5\times(-4)=9-10-4-20=-25$

Ex 3 :

$A=\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{5}\right)=\frac{3}{4}\times\frac{-3}{10}=\frac{-9}{40}$ $\qquad$ $B=\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}+\frac{3}{2}\times\frac{5}{6}=\frac{3}{16}+\frac{5}{4}=\frac{3}{16}+\frac{20}{16}=\frac{23}{16}$

$C=\frac{\frac{4}{5}-\frac{3}{5}}{4}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$ $\qquad$ $D=\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{6}}=\frac{\frac{7}{6}}{\frac{7}{12}}=\frac{7}{6}\times\frac{12}{7}=2$

Ex 4 :

$C=\frac{0,23\times10^3-1,7\times10^2}{0,5\times10^{-1}}=\frac{230-170}{0,05}\frac{60}{0,05}=1200=1,2\times10^3$

$D=\frac{48\times10^{-4}\times13\times10^{-5}}{3\times10^2}=208\times10^{-11}=2,08\times10^{-9}$

Ex 5 :

1) $A=(8+x)-(20-x)=8+x-20+x=2x-12$

$B=(8+x)(20-x)=160-8x+20x-x^2=-x^2+12x+160$

2) $8(20-x)=16x$; $160-8x=16x$; $24x=160$; $x=\frac{20}{3}$. La solution de l'équation est $\frac{20}{3}$.

3) a) $0<x<20$ cm. b) $\mathcal{A}_{MPSA}=(20-x)(x+8)$ cm².

c) Si $x=5$ cm, $\mathcal{A}_{MPSA}=15\times13$ cm² = 195 cm².

d) $\mathcal{A}_{NPSB}=8(20-x)$; $\mathcal{A}_{BSRC}=8x$. On résout : $8(20-x)=2\times8x$; $8(20-x)=16x$.

D'après la question 2), la solution de cette équation est $\frac{20}{3}$. On vérifie qu'on a bien : $0<\frac{20}{3}<20$.

Ainsi, pour $x=\frac{20}{3}$ cm, l'aire du rectangle NPSB est le double de celle du rectangle BSRC.

Partie géométrique :

Ex 1 :

On sait que (AH) est la hauteur issue de A dans le triangle ABC ; par définition d'une hauteur, on en déduit que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires, et donc que les triangles ABH et ACH sont rectangles en H.

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ACH rectangle en H, on obtient :

$AC^2 = AH^2 + CH^2$; $11^2 = 7^2 + CH^2$; $CH^2 = 72$; $CH = \sqrt{72}$ cm ; $CH \approx 8,5$ cm.

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABH rectangle en H, on obtient :

$AB^2 = AH^2 + BH^2$; $AB^2 = 7^2 + 5^2$; $AB^2 = 74$; $AB = \sqrt{74}$ cm ; $AB \approx 8,6$ cm.

EX 2:

1. Dans le triangle ABC, on a : $\widehat{ABC} = \widehat{BCA} = 62°$; or, la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°. Donc : $\widehat{BCA} = 180° - 2\times62° = 56°$.

2. Le triangle ABC est isocèle en A et la droite (AH) est la hauteur issue de A dans ce triangle ; or, si un triangle est isocèle, alors la hauteur issue du sommet principal est bissectrice de l'angle au sommet principal.

Donc :.$\widehat{BAH} = \frac{1}{2} \times \widehat{BAC} = \frac{56°}{2} = 28°$

3. Dans le triangle ABH rectangle en H : $\cos(\widehat{BAH}) = \frac{AH}{AB}$; $\cos 28° = \frac{AH}{11}$; $AH = 11 \cos 28°$ cm ;

AH ≈ 9,7 cm.

EX 3:

2) Je calcule : $BC^2 = 10^2 = 100$; $AB^2 + AC^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$.
On remarque que : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
En appliquant la réciproque du théorème de Pythagore, on conclut que le triangle ABC est rectangle en A.
3) Le triangle ABC est rectangle en A ; or, si un triangle est rectangle, alors l'hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit. Donc A appartient à C.
4) a- Dans le triangle ABC, I et O sont les milieux respectifs des côtés [AC] et [BC] ; Or, dans un triangle, toute droite qui passe par les milieux de deux des côtés est parallèle au troisième côté. Donc les droites (AB) et (IO) sont parallèles.
b- Sous les mêmes hypothèses qu'à la question précédente : dans un triangle, tout segment qui joint les milieux de deux des côtés a pour longueur la moitié de celle du troisième côté. Donc : IO = AB/2 = 4 cm.
5) a- Les droites (AB) et (IO) sont parallèles ; or, la droite (AB) est perpendiculaire à (AC), donc : $(IO) \perp (AC)$ (1).
(d) est la tangente à C en T. Donc, par définition d'une tangente : $(IO) \perp (d)$ (2).
Des relations (1) et (2), on conclut que les droites (d) et (AC) sont parallèles.
b- C, T et A sont sur C, donc, par définition du cercle : OC = OT = OA = 5 cm.
c- Dans les triangles OIC et OTE : $C \in [OE]$ et $I \in [OT]$; de plus : (IC) // (TE).
En appliquant le théorème de Thalès, on obtient : $\frac{OC}{OE} = \frac{OI}{OT} = \frac{CI}{ET}$; $\frac{5}{OE} = \frac{4}{5}$; $OE = \frac{5 \times 5}{4}$; OE = 6,25 cm.
6) a- Dans le triangle ABC, I et O sont les milieux respectifs des côtés [AC] et [BC] ; donc, par définition, les segments [AO] et [BI] sont deux des médianes du triangle ABC. Or, les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé centre de gravité du triangle. Donc K est le centre de gravité du triangle ABC.
b- K est le centre de gravité du triangle ABC ; or, dans un triangle, le centre de gravité est situé au 2/3 de chacune des médianes à partir du sommet. Donc $AK = \frac{2}{3} AO$; $AK = \frac{10}{3}$ cm.
<u>Attention :</u> le dessin ci-dessous ne tient pas compte des mesures données dans l'énoncé.