Brevet de Mathématiques – Éléments de correction 23 / 6 / 2016

Exercice 1 (4 points)

	Usine A	Usine B
Bons	473	462
Défectueux	27	38

On suppose que les prélèvements s'effectuent dans des **conditions d'équiprobabilité**.

1) On prélève un composant au hasard parmi ceux provenant de l'usine A.

La probabilité qu'il soit défectueux est : $\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{27}{500} = 0{,}054 = 5{,}4\ \%$

2) On prélève un composant au hasard parmi ceux qui sont défectueux.

La probabilité qu'il provienne de l'usine A est :

$\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{27}{27+38} = \dfrac{27}{65} \approx 0{,}415$, ou encore environ 41,5%.

3) Usine A : $\dfrac{27}{500} = 0{,}054 = \dfrac{5{,}4}{100}$: il y a 5,4 % d'éléments défectueux dans l'échantillon de l'usine A.

Usine B : $\dfrac{38}{500} = 0{,}076 = \dfrac{7{,}6}{100}$: il y a 7,6 % d'éléments défectueux dans l'échantillon de l'usine B.

Comme 7,6 > 7, le contrôle n'est pas satisfaisant.

Ou : 1% de 500 composants, c'est $\dfrac{1}{100} \times 5 = 5$ composants ;

donc 7% de 500 composants, c'est $7 \times 5 = 35$ composants ; or 38 > 35 ...

Exercice 2 (4,5 points)

1) On choisit le nombre : 2.

On multiplie par – 2 : $2 \times (-2) = -4$.

On ajoute 13 : $-4 + 13 = 9$.

En choisissant – 2 au départ avec le programme A, on obtient bien 9.

2) Soit x le nombre de départ.

On soustrait 7 : $x - 7$

On multiplie par 3 : $3\ (x - 7)$

On souhaite obtenir 9 : $3\ (x - 7) = 9$

D'où $x - 7 = 3$,

et $x = 10$

Pour obtenir 9 avec le programme B, il faut choisir 10 au départ.

3) Soit x le nombre de départ choisi ;

- avec le programme A, on obtient $-2x + 13$;
- avec le programme B, on obtient $3\ (x - 7)$.

Les résultats sont égaux se traduit par l'égalité : $-2x + 13 = 3\ (x - 7)$

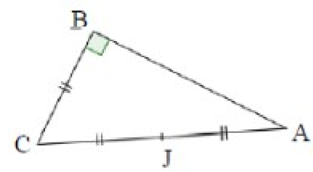
Résolution de l'équation : $-2x + 13 = 3x - 21$

$$13 + 21 = 3x + 2x$$
$$34 = 5x$$
$$x = 6{,}8$$

<u>En prenant 6,8 au départ, les deux programmes de calcul donnent le même résultat</u>.

<u>Exercice 3</u> (5 points)

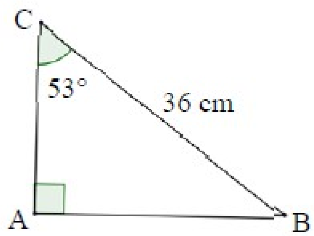
<u>Figure 1</u>



BC = 6 cm.

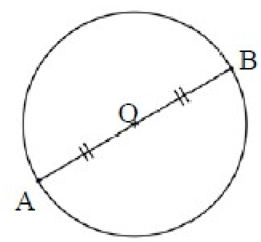
On suppose que les points C, J et A sont alignés ;
alors J est le milieu du côté [AC] et BC = CJ ;
d'où $AC = 2 \times CJ = 2 \times 6 = 12$ cm .
Dans le triangle ABC rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore,
$AB^2 + BC^2 = AC^2$; d'où $AB^2 + 6^2 = 12^2$, et $AB^2 = 108$;
AB est une longueur, donc un nombre positif :
$AB = \sqrt{108} = \sqrt{36 \times 3} = \underline{6\sqrt{3}\text{ cm}}$; $\underline{AB \approx 10{,}4\text{ cm}}$ <u>(arrondi au mm)</u>

<u>Figure 2</u>



Dans le triangle ABC rectangle en A, $\sin \widehat{ACB} = \dfrac{AB}{BC}$;
d'où $BC \times \sin \widehat{ACB} = AB$;
et $\underline{AB = 36 \times \sin 53°\text{ cm}}$;
$\underline{AB \approx 28{,}8\text{ cm}}$ <u>(arrondi au mm)</u>

<u>Figure 3</u>



[AB] est un diamètre du cercle de centre O.
La longueur du cercle est 154 cm.

La longueur d'un cercle est égale à $\pi \times$ diamètre .
D'où $\pi \times AB = 154$,
et $\underline{AB = \dfrac{154}{\pi}\text{ cm}}$;
$\underline{AB \approx 49{,}0\text{ cm}}$ <u>(arrondi au mm)</u>

<u>Exercice 4</u> (5 points)

1) $54 - 54 \times \dfrac{30}{100} = 37{,}80$ € . <u>Le prix d'un article de 54 € après réduction de 30% est de 37,80 €</u>.

<u>Ou</u> : Après une réduction de 30%, il reste à payer 100 % – 30 % = 70 %.
Or 1 % de 54 € est égal à 54 : 100, c'est-à-dire 0,54 € ;
donc 70 % de 54 € font $0{,}54 \times 70 =$ <u>37,80 €</u> .

2) a) On peut par exemple saisir la formule : = B1 * 30 / 100 , ou = B1 * 0,3

b) On peut par exemple saisir la formule : = B1 – B2 , ou = B1 * 70 / 100 , ou = B1 * 0,7

3) Soit p le prix initial, en € ; le prix soldé est $\left(1 - \dfrac{30}{100}\right) p = \dfrac{70}{100}\, p = 0{,}7\, p$.

D'où $0{,}7\,p = 42$, et $p = 42 : 0{,}7 = 60$; <u>le prix initial était de 60 €</u>.

Exercice 5 **(5,5 points)**

1) L'aire d'un triangle est $\dfrac{\text{base} \times \text{hauteur relative}}{2}$. D'où $\text{Aire}_{\text{PAS}} = \dfrac{\text{AS} \times \text{PA}}{2} = \dfrac{18 \times 30}{2} = \underline{270\ \text{m}^2}$

On effectue la division euclidienne de 270 par 140 : $270 = 1 \times 140 + 130$;
il faut donc prévoir deux sacs, pour un montant de $2 \times 13{,}90 = \underline{27{,}80\ €}$

2) *Remarque*. *On propose ci-dessous différentes méthodes pour calculer l'aire du « skatepark », avec ou sans le calcul de* RC.

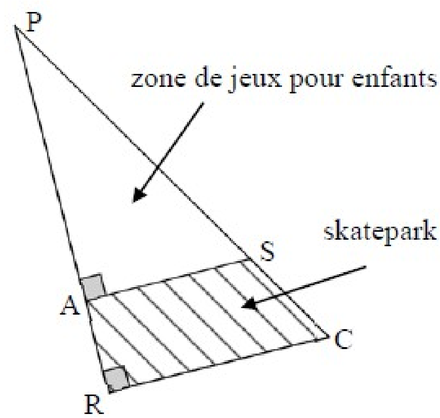
Calcul de RC

Avec la trigonométrie Dans le triangle PAS rectangle en A, $\tan \widehat{\text{APS}} = \dfrac{\text{AS}}{\text{PA}}$;

dans le triangle PRC rectangle en R, $\tan \widehat{\text{APS}} = \dfrac{\text{RC}}{\text{PA} + \text{AR}}$;

d'où $\dfrac{\text{AS}}{\text{PA}} = \dfrac{\text{RC}}{\text{PA} + \text{AR}} \left(= \tan \widehat{\text{APS}} \right)$; et $\text{RC} = \dfrac{\text{AS} \times (\text{PA} + \text{AR})}{\text{PA}} = \dfrac{18 \times (30 + 10)}{30} = \underline{24\ \text{m}}$

Avec le théorème de Thalès Les droites (AS) et (RC) sont toutes deux perpendiculaires à (AR), donc elles sont parallèles entre elles.



Les triangles PAS et PRC sont déterminés par :
* les droites (PR) et (PC) sécantes en P
* les droites parallèles (AS) et (RC).

D'après le théorème de Thalès, les longueurs des côtés des triangles sont proportionnelles : $\dfrac{\text{PA}}{\text{PR}} = \dfrac{\text{PS}}{\text{PC}} = \dfrac{\text{AS}}{\text{RC}}$

Je remplace : $\dfrac{30}{30 + 10} = \dfrac{\text{PS}}{\text{PC}} = \dfrac{18}{\text{RC}}$.

D'où $30 \times \text{RC} = 18 \times 40$; et $\text{RC} = \dfrac{18 \times 40}{30} = \underline{24\ \text{m}}$

Avec les agrandissements Le triangle PRC est un agrandissement du triangle PAS ; le coefficient d'agrandissement est $k = \dfrac{\text{PR}}{\text{PA}} = \dfrac{30+10}{30} = \dfrac{4}{3}$; d'où $\text{RC} = k \times \text{AS} = \dfrac{4}{3} \times 18 = \underline{24\ \text{m}}$.

Aire du « skatepark »

Par différence : $\text{Aire}_{\text{ARCS}} = \text{Aire}_{\text{PRC}} - \text{Aire}_{\text{PAS}} = \dfrac{\text{RC} \times \text{PR}}{2} - 270 = \dfrac{24 \times (30+10)}{2} - 270 = 210\ \text{m}^2$

Avec l'aire d'un trapèze :

$$\text{Aire}_{\text{ARCS}} = \frac{(\text{petite base} + \text{grande base}) \times \text{hauteur}}{2} = \frac{(\text{AS}+\text{RC}) \times \text{AR}}{2} = \frac{(18+24) \times 10}{2} = 210\ \text{m}^2$$

Directement avec les agrandissements (sans calculer RC *!)* Le triangle PRC est un agrandissement du triangle PAS ; le coefficient d'agrandissement est $k = \dfrac{\text{PR}}{\text{PA}} = \dfrac{30+10}{30} = \dfrac{4}{3}$;

d'où $\text{Aire}_{\text{PRC}} = k^2 \times \text{Aire}_{\text{PAS}} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 \times 270 = 480\ \text{m}^2$;

et $\text{Aire}_{\text{ARCS}} = \text{Aire}_{\text{PRC}} - \text{Aire}_{\text{PAS}} = 480 - 270 = 210\ \text{m}^2$

(*ou encore* $\text{Aire}_{\text{ARCS}} = \text{Aire}_{\text{PRC}} - \text{Aire}_{\text{PAS}} = k^2 \times \text{Aire}_{\text{PAS}} - \text{Aire}_{\text{PAS}} = \left[\left(\dfrac{4}{3}\right)^2 - 1 \right] \times 270 = 210\ \text{m}^2$)

<u>Exercice 6</u> (7 points)

<u>Partie 1</u>

1) On construit un carré avec une ficelle de longueur 8 cm ; le côté du carré mesure 8 : 4 = 2 cm.
On construit un triangle équilatéral avec une ficelle de longueur 20 – 8 = 12 cm ;
le côté du triangle mesure 12 : 3 = 4 cm.

2) L'aire d'un carré de côté c est égale à c^2. On a ici $c^2 = 2^2 = 4$ cm².

3) On mesure la hauteur du triangle sur la figure ; on trouve $h \approx 3{,}5$ cm .
D'où l'estimation de l'aire du triangle : $\dfrac{\text{base} \times \text{hauteur relative}}{2} \approx \dfrac{4 \times 3{,}5}{2} \approx \underline{7\ \text{cm}^2}$

<u>Partie 2</u>

1) On note l la longueur du « morceau n°1 » ; l'aire du carré est égale à $\underline{\left(\dfrac{l}{4}\right)^2 = \dfrac{l^2}{16}}$

2) a) La longueur du « morceau n°1 » qui permet d'obtenir un triangle équilatéral d'aire 14 cm² est d'<u>environ 3 cm</u>. (C'est l'abscisse du point de la courbe B qui a pour ordonnée 14.)

b) La longueur du « morceau n°1 » qui permet d'obtenir deux polygones d'aires égales est d'<u>environ 9,2 cm</u>. (C'est l'abscisse du point d'intersection des deux courbes.)

<u>Exercice 7</u> (5 points)

<u>Volume intérieur du vase V_i</u>

L'**<u>intérieur</u>** du vase est un parallélépipède rectangle,
de base un carré de côté $9 - 2 \times 0{,}2 = 8{,}6$ cm ,
de hauteur 21,7 – 1,7 = 20 cm.
Son volume est

$V_i = \text{base} \times \text{hauteur relative} = 8{,}6^2 \times 20 = \underline{1\,479{,}2\ \text{cm}^3}$

<u>Volume des 150 billes V_b</u>

$V_b = 150 \times \dfrac{4}{3} \times \pi \times \left(\dfrac{1{,}8}{2}\right)^3 = \underline{145{,}8\ \pi\ \text{cm}^3}$

<u>Volume libre V</u>

$V = V_i - V_b = 1\,479{,}2 - 145{,}8\ \pi\ \text{cm}^3$;
$\underline{V \approx 1\,021{,}2\ \text{cm}^3}$

<u>Conclusion</u>

Comme $1\ \text{L} = 1\ \text{dm}^3 = 1\,000\ \text{cm}^3$,
et V > 1 000 cm³,
<u>Antoine peut ajouter un litre d'eau sans risquer le débordement</u>.