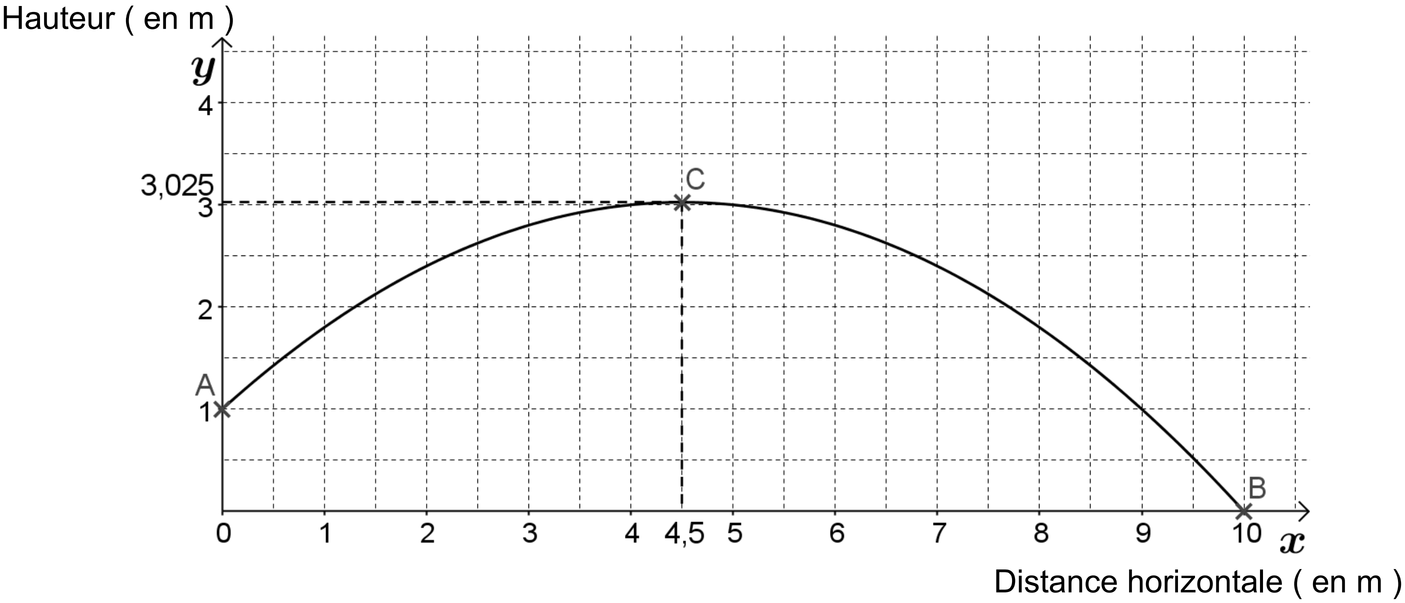
3^e – Contrôle commun de mathématiques – Éléments de correction – V. 28 / 11 / 2014

Durée : 50 minutes **Soin, présentation, orthographe, rédaction : 2 points** **Note finale sur 30 points**

Exercice 1 ***(5,5 points)***

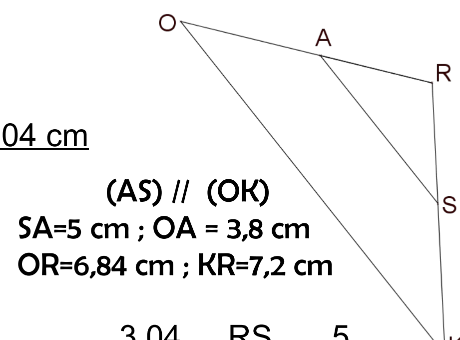


1. Les réponses sont ici données grâce à des **lectures graphiques mises en évidence**.

   a. La flèche est tirée d'une hauteur d'environ 1 m (point A).
   b. La flèche retombe au sol à environ 10 m de Claude (point B).
   c. La hauteur maximale atteinte par la flèche est d'environ 3 m (point C).

2. Les réponses sont données grâce à des **calculs**. f est définie par $f(x) = -0{,}1\,x^2 + 0{,}9\,x + 1$.
   a. Calcul de $f(5)$. $f(5) = -0{,}1 \times 5^2 + 0{,}9 \times 5 + 1$; $f(5) = 3$
   b. Calcul de $f(4{,}5)$. $f(4{,}5) = -0{,}1 \times 4{,}5^2 + 0{,}9 \times 4{,}5 + 1$; $f(4{,}5) = 3{,}025$
   Comme $f(4{,}5) > 3$, la flèche s'élève bien à plus de 3 m de hauteur.

Exercice 2 ***(8,5 points)***



Question a) Quelle est la longueur RA ?
Réponse a) $A \in [RO]$, donc RA = RO – AO = 6,84 – 3,8 ; RA = 3,04 cm

Question b) Quelle est la longueur OK ?
Réponse b) Les triangles RAS et ROK sont déterminés par :
- les droites parallèles (AS) et (OK) ;
- les droites (OR) et (KR) sécantes en R.

D'après le théorème de Thalès, on a : $\dfrac{RA}{RO} = \dfrac{RS}{RK} = \dfrac{AS}{OK}$. On remplace : $\dfrac{3{,}04}{6{,}84} = \dfrac{RS}{7{,}2} = \dfrac{5}{OK}$

Calcul de OK . Nous avons : $\dfrac{3{,}04}{6{,}84} = \dfrac{5}{OK}$.

Les nombres sont égaux : les produits en croix sont égaux.

Donc $3{,}04 \times OK = 5 \times 6{,}84$; d'où $OK = \dfrac{5 \times 6{,}84}{3{,}04}$; OK = 11,25 cm .

Question c) Quel est le périmètre P du triangle KRO ?
Réponse c) P = KR + RO + OK = 7,2 + 6,84 + 11,25 = 25,29 ; P = 25,29 cm

Exercice 3 ***(10,5 points)***

1. a.

	est divisible par 2	est divisible par 3	est divisible par 5
2015	**non**	**non**	**oui**
806	**oui**	**non**	**non**

b. D'après le tableau, on peut seulement affirmer que 2 ; 3 et 5 ne sont pas des diviseurs communs à 806 et 2015; mais il en existe peut-être d'autres, différents de 1.
On ne peut donc affirmer que les nombres 806 et 2 015 sont premiers entre eux.

2. a. Calcul de PGCD (806 ; 2 015). *Dans ce corrigé, nous présentons plusieurs méthodes.*

Méthode 1 Je cherche le PGCD de 806 et 2 015 avec l'algorithme d' Euclide.

Si r est le reste non nul de la division euclidienne de a par b , et si r ≠ 0,
alors PGCD (a ; b) = PGCD (b ; r)

$2\ 015 = 806 \times 2 + 403$; PGCD (2 015 ; 806) = PGCD (806 ; 403)

$806 = 403 \times 2$; PGCD (806 ; 403) = 403

donc PGCD (806 ; 2 015) = 403 .

Méthode 2 Je cherche le PGCD de 806 et 2 015 avec les listes de diviseurs.

Liste des diviseurs de 806 : 1 ; 2 ; 13 ; 26 ; 31 ; 62 ; 403 ; 806

Liste des diviseurs de 2 015 : 1 ; 5 ; 13 ; 31 ; 65 ; 155 ; 403 ; 2 015

Donc PGCD (806 ; 2 015) = 403

Méthode 3
Je cherche le PGCD de 806 et 2 015 avec l'algorithme des soustractions successives.

Si a et b sont deux nombres positifs non nuls, avec $a > b$, alors PGCD (a ; b) = PGCD (b ; $a - b$).

2 015 – 806 = 1 209 ; PGCD (2 015 ; 806) = PGCD (1 209 ; 806)

1 209 – 806 = 403 ; PGCD (1 209 ; 806) = PGCD (806 ; 403)

806 – 403 = 403 ; PGCD (806 ; 403) = PGCD (403 ; 403) = 403

PGCD (806 ; 2 015) = 403

Méthode 4
Je cherche le PGCD de 806 et 2 015 avec la décomposition en produit de facteurs premiers.

Décomposition de 806 : $806 = 2 \times 13 \times 31$

Décomposition de 2 015 : $2\ 015 = 5 \times 13 \times 31$

Donc $\text{PGCD}\left(806 ; 2\ 015\right) = 13 \times 31$; PGCD (806 ; 2 015) = 403

b. Forme irréductible de la fraction $\frac{806}{2\,015}$

Nous simplifions par le PGCD du numérateur et du dénominateur; d'après a) , c'est 403.

Nous avons : $\frac{806}{2\,015} = \frac{403 \times 2}{403 \times 5}$; la forme irréductible de $\frac{806}{2\,015}$ est donc $\frac{2}{5}$.

3. Calcul de 806² avec une identité remarquable

$806^2 = (800 + 6)^2 = 800^2 + 2 \times 800 \times 6 + 6^2 = 640\,000 + 9\,600 + 36$; $806^2 = 649\,636$.

4. Appelons x le nombre cherché. Nous voulons $\frac{806 + x}{2\,015 + x} = \frac{2}{3}$.

Les nombres sont égaux : les produits en croix sont égaux.

$(806 + x) \times 3 = (2\,015 + x) \times 2$

$806 \times 3 + x \times 3 = 2\,015 \times 2 + x \times 2$	*(On développe.)*
$2\,418 + 3\,x = 4\,030 + 2\,x$	*(On réduit.)*
$2\,418 + 3\,x - 2\,x = 4\,030 - 2\,418$	*(On soustrait 2 x à chaque membre.)*
$x = 4\,030 - 2\,418$	*(On soustrait 2 418 à chaque membre.)*
$x = 1\,612$	

Vérification : $\frac{806 + 1\,612}{2\,015 + 1\,612} = \frac{2\,418}{3\,627} = \frac{2 \times 1\,209}{3 \times 1\,209} = \frac{2}{3}$

Le nombre cherché est 1 612.

Exercice 4 ***(3,5 points)***

Soit n un nombre entier. Appliquons le programme de calcul :

Choix d'un nombre entier	n
Ajout de 3	$n + 3$
Multiplication par 7	$(n + 3) \times 7$
Ajout du triple du nombre de départ	$(n + 3) \times 7 + 3 \times n$
Soustraction de 21	$(n + 3) \times 7 + 3 \times n - 21$

Réduisons l'expression obtenue :

$(n + 3) \times 7 + 3 \times n - 21 = n \times 7 + 3 \times 7 + 3 \times n - 21 = 7\,n + 21 + 3\,n - 21 = 10\,n$

Comme n est un nombre entier, le nombre obtenu est bien un multiple de 10.