3e	**Contrôle commun de mathématiques** **Éléments de correction**	**J. 16 / 5 / 2013**

Durée : 50 minutes — *L'usage de la calculatrice est autorisé.*

Soin, présentation, orthographe, rédaction : ***2 points*** — *Note finale sur* ***30 points***

Exercice 1 ***(4 points)***

Dans un sac opaque, Blaise enferme quatre cubes bleus, cinq cubes rouges, six cubes verts et dix cubes blancs ; tous les cubes sont indiscernables au toucher. Pascale tire un cube au hasard.

1. Pour chaque ligne du tableau ci-après, trois réponses sont proposées, mais une seule est exacte. Compléter la dernière colonne du tableau, sans justifier.

   N.B. Une réponse fausse ou une absence de réponse n'enlève pas de point.

Question	**Rép. 1**	**Rép. 2**	**Rép. 3**	**Réponse choisie**	***Explication***
a) La probabilité d'obtenir un cube rouge est égale à :	0,05	1	0,2	**0,2**	$\frac{5}{4+5+6+10}=\frac{5}{25}$
b) La probabilité d'obtenir un cube est égale à :	1	0,5	0	**1**	*évènement certain*
c) La probabilité d'obtenir un cube dont la couleur est l'une des couleurs du drapeau français est égale à :	0,4	0,01	0,76	**0,76**	$\frac{4+5+10}{4+5+6+10}=\frac{19}{25}$
d) La probabilité d'obtenir un cube jaune est égale à :	1	0	0,5	**0**	*évènement impossible*

2. Blaise ajoute des cubes jaunes, indiscernables au toucher. Pascale a alors une chance sur six de piocher un cube jaune. Combien de cubes jaunes Blaise a-t-il ajoutés ?

On veut : $\frac{\text{nombre de cubes jaunes}}{\text{nombre total de cubes}}=\frac{1}{6}$.

<u>Méthode 1</u>

On appelle x le nombre de cubes jaunes. On doit avoir : $\frac{x}{4+5+6+10+x}=\frac{1}{6}$,c'est-à-dire $\frac{x}{25+x}=\frac{1}{6}$

Les nombres sont égaux : les produits en croix sont égaux.
On obtient : $6\times x=1\times(25+x)$; d'où $6\,x=25+x$, puis $5\,x=25$, et $x=5$.

<u>Méthode 2</u>

On procède par essais (*inconvénient* : on ne peut savoir si on trouve TOUTES les solutions)

Si Blaise ajoute un cube jaune, alors la probabilité de piocher un cube jaune est égale à $\frac{1}{25+1}$;

si Blaise ajoute deux cubes jaunes, alors la probabilité de piocher un cube jaune est égale à $\frac{2}{25+2}$;

...

si Blaise ajoute 5 cubes jaunes, alors la probabilité de piocher un cube jaune est égale à $\frac{5}{25+5}=\frac{1}{6}$.

<u>Blaise a ajouté 5 cubes jaunes</u>.

Exercice 2 ***(8 points)*** Léonie et Ducobu travaillent sur un exercice de mathématiques.

1.a) Etapes possibles pour montrer $\sqrt{27} + 5\sqrt{12} - \sqrt{300} = 3\sqrt{3}$:

$\sqrt{27} + 5\sqrt{12} - \sqrt{300} = \sqrt{9 \times 3} + 5\sqrt{4 \times 3} - \sqrt{100 \times 3}$

$\sqrt{27} + 5\sqrt{12} - \sqrt{300} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} + 5\sqrt{4} \times \sqrt{3} - \sqrt{100} \times \sqrt{3}$

$\sqrt{27} + 5\sqrt{12} - \sqrt{300} = 3 \times \sqrt{3} + 5 \times 2 \times \sqrt{3} - 10 \times \sqrt{3}$

$\sqrt{27} + 5\sqrt{12} - \sqrt{300} = 3\sqrt{3} + 10 \times \sqrt{3} - 10 \times \sqrt{3}$

$\sqrt{27} + 5\sqrt{12} - \sqrt{300} = (3 + 10 - 10)\sqrt{3}$

$\sqrt{27} + 5\sqrt{12} - \sqrt{300} = 3\sqrt{3}$

1.b) S'il ne prouve pas que les valeurs affichées sont des valeurs **exactes**, Ducobu ne peut conclure que les expressions sont égales.

2.a) Les nombres $\sqrt{6} - \sqrt{5}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}}$

On développe avec une identité remarquable : $(\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5}) = \sqrt{6}^2 - \sqrt{5}^2 = 6 - 5 = 1$.

<u>Méthode 1</u>

Leur produit est égal à 1, donc les nombres $\sqrt{6} - \sqrt{5}$ et $\sqrt{6} + \sqrt{5}$ sont inverses.

" $\sqrt{6} - \sqrt{5}$ est l'inverse de $\sqrt{6} + \sqrt{5}$ " s'écrit aussi " $\boxed{\sqrt{6} - \sqrt{5} = \dfrac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}}}$ ".

<u>Méthode 2</u>

On a $(\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5}) = 1$;

on divise chaque membre par $\sqrt{6} + \sqrt{5}$ (nombre non nul) : $\dfrac{(\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5})}{\sqrt{6} + \sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}}$

d'où $\boxed{\sqrt{6} - \sqrt{5} = \dfrac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}}}$

2.b) On a bien $\sqrt{6} - \sqrt{5} \approx 0{,}213\ 421\ 765$,

mais $\dfrac{1}{\sqrt{6}} + \sqrt{5} \approx 2{,}644\ 316\ 268$: Ducobu a oublié d'écrire des parenthèses autour de $\sqrt{6} + \sqrt{5}$.

3. Pour calculer $n^2 - 6n + 9$ avec $n = -10$, Ducobu écrit :

$$-10^2 - 6 \times (-10) + 9 = -100 + 60 + 9 = -31 .$$

Léonie lui répond qu'il s'est trompé car $n^2 - 6n + 9$ est toujours positif.

3. a) Ducobu s'est-il trompé dans son calcul ? Si oui, corriger son travail.

Ducobu a encore oublié les parenthèses; pour $n = -10$, $n^2 = (-10)^2 = (-10) \times (-10) = +100$.

D'où $n^2 - 6n + 9 = (-10)^2 - 6 \times (-10) + 9 = 100 + 60 + 9 = 169$

3. b) Léonie dit-elle vrai ?

$n^2 - 6n + 9 = n^2 - 2 \times n \times 3 + 3^2 = (n - 3)^2$; comme un carré est positif, Léonie dit vrai.

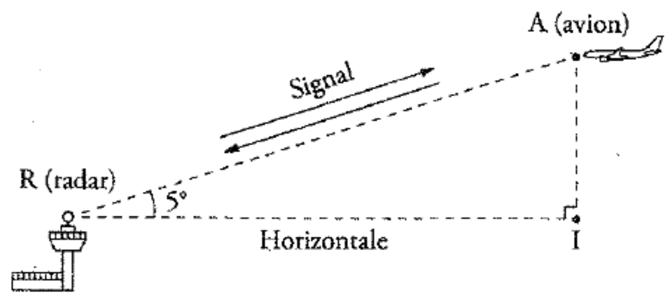
Exercice 3 ***(5 points)*** Quand l'avion reliant Nantes à Toulouse n'est plus très loin de l'aéroport de Toulouse, le radar de la tour de contrôle émet un signal bref en direction de l'avion. Le signal atteint l'avion et revient au radar 0, 000 3 seconde après son émission.

1. Sachant que le signal est émis à la vitesse de 300 000 kilomètres par seconde, vérifier qu'à cet instant l'avion se trouve à 45 kilomètres du radar de la tour de contrôle.

On connaît la formule $\text{vitesse} = \dfrac{\text{distance}}{\text{temps}}$; on en déduit $\text{distance} = \text{vitesse} \times \text{temps}$

Application numérique, avec la distance en km , la vitesse en km/s et le temps en s :

$$\text{distance} = 300\,000 \times \frac{0{,}000\,3}{2} = 45$$



La figure n'est pas à l'échelle.

2. La direction radar-avion fait un angle de 5° avec l'horizontale.
Calculer alors l'altitude de l'avion à cet instant.
(On négligera la hauteur de la tour de contrôle, et on arrondira le résultat à la centaine de mètres près.)

Le triangle AIR est rectangle en I ; $\sin \widehat{ARI} = \dfrac{AI}{AR}$;

$AI = AR \times \sin \widehat{ARI} = 45 \sin 5°$

$AI \approx 3{,}9$ km (arrondi à la centaine de mètres)

Exercice 4 ***(4 points)*** Nadia a trois semaines de vacances ; elle souhaite se rendre dans un camping, et dispose pour cela d'un budget de 100 €. Elle réfléchit au nombre de jours qu'elle pourra s'offrir dans ce camping selon la formule choisie :

- Formule A : forfait de 48 € par semaine. Toute semaine commencée est payée !
- Formule B : 9,50 € par jour.

1. Une étude de prix avec la formule B   Pour s'aider, Nadia crée une feuille de calcul :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	Jours	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	Formule B (en €)	9,5	19	28,5	38	47,5	57	66,5	76	85,5	95	104,5	114	123,5	133	142,5

1.a) En une phrase, expliquer clairement à quoi correspond le nombre affiché en L2.
On trouve en L2 le prix à payer pour 11 jours ($9{,}50 \times 11$), en € .

1.b) Nadia a écrit une formule dans la cellule B2. Ainsi, elle a pu trouver les résultats jusqu'en P2 en faisant simplement glisser la souris. Qu'a-t-elle écrit en B2 ? *(On recopiera la bonne réponse sans justifier.)*

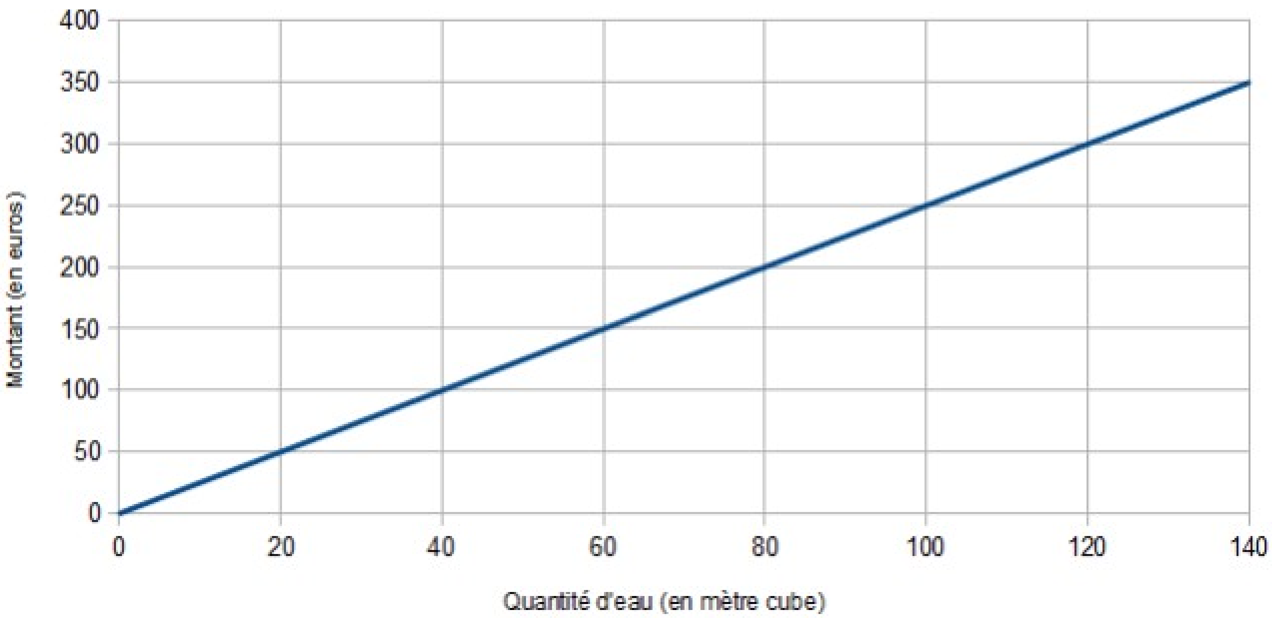
(e) **= 9,5*B1**

1.c) $95 < 100 < 104{,}5$, donc d'après les résultats du tableur Nadia peut s'offrir 10 jours de camping avec la formule B.

2. Comparaison des deux tarifs et choix
Avec la formule A, Nadia peut rester 2 semaines ($48 \times 2 = 96$ et $96 < 100$) ,
mais pas 3 ($48 \times 3 > 100$) ; elle n'a pas de quoi payer un jour supplémentaire ($9{,}5 > 100 - 96$).
Avec la formule B, Nadia ne peut rester que 10 jours.
La formule A est donc la plus intéressante ; elle lui permet de rester 14 jours au camping, pour 96 €.

<u>Exercice 5</u> ***(7 points)***

1. Le graphique ci-dessous représente le coût de l'eau en fonction de la quantité consommée.
La représentation graphique est une droite passant par les points de coordonnées (0 ; 0) et (140 ; 350).



1.a) On lit graphiquement une valeur approchée du prix payé pour 100 m^3 d'eau : <u>250 €</u>.

1.b) On note $p(x)$ le prix en euros de la consommation pour x mètres cube d'eau.
La représentation graphique de p est une droite passant par l'origine, donc p est une fonction linéaire, et $p(x)$ est de la forme $a\,x$, où a est un nombre.
D'après l'énoncé, p (140) = 350. Donc 140 a = 350, d'où a = 350 : 140 = 2,5 et $\underline{p(x) = 2{,}5\,x}$.

1.c) Le point de coordonnées (62 ; 154) appartient-il à la droite représentant la fonction p ?
$2{,}5 \times 62 \neq 154$,
donc <u>le point de coordonnées (62 ; 154) n'appartient pas à la droite représentant la fonction p</u>.

2. <u>Amortissement</u> - La famille Aqua prévoit économiser 250 € par an en récupérant de l'eau de pluie.
La citerne coûte 910 €. On effectue une division euclidienne : $910 = 3 \times 250 + 160$.
En supposant qu'elle économise 250 € par an grâce à la récupération de l'eau de pluie, il faudra 3 + 1 = <u>4 années</u> à la famille Aqua pour compenser l'achat de la citerne.

3. <u>Une réduction</u> - Un mois plus tard, la même citerne est en promotion à 728 €.
La diminution est de 910 - 728 = 182 ; on cherche p tel que $\dfrac{p}{100} \times 910 = 182$.
On trouve : $p = \dfrac{182 \times 100}{910}$; $p = 20$

Autre méthode
On calcule $\dfrac{910 - 728}{910} = 0{,}2 = \dfrac{20}{100}$.

Avec une <u>réduction de 20 %</u>, la citerne est en promotion à 728 € .